

Logaritmintroduction

Nikodemus Karlsson

Exempel på potensfunktion: $y = x^3$

Exempel på exponentialfunktion: $y = 3^x$

Enkel ekvation: $3^x = 3^2$ (baser lika, alltså exponenter lika)
 $x = 2$

Nästan lika enkel ekvation:

$$27^x = 9; (3^3)^x = 9; 3^{3x} = 9; 3^{3x} = 3^2; 3x = 2; x = \frac{2}{3}$$

Men hur gör man för att lösa ekvationen $10^x = 20$??

Denna hemlighet avslöjas på nästa sida!

Verktyget för att lösa ekvationer av typen $10^x = 20$ heter **logaritmer**.

Logaritmen (lg) av ett tal a är det tal som 10 skall höjas upp med för att bli a . I ovanstående exempel får vi $x = \lg 20$. Slår vi in det på miniräknare erhålls ungefär 1,3010.

Några viktiga logaritmer är: $\lg 100 = 2$, $\lg 10 = 1$ och $\lg 1 = 0$. Logaritmen för 0 finns inte (inte som ett reellt tal i alla fall), då det inte existerar något reellt tal man kan höja upp 10 med för att få 0. På samma sätt finns inte logaritmer för negativa tal heller, bland de reella talen.

Pröva med miniräknare vad som händer om du tar logaritmen för ett tal mellan 0 och 1 (och för sakens skull, när du tar logaritmen för talet 0 eller för negativa tal).

Vi kan skriva varje tal som en potens av 10, t ex $100 = 10^2$

Men hur kan man skriva talet 50 som en potens av 10? Detta avslöjas på nästa sida!

Med hjälp av definitionen av logaritmen ("Logaritmen (lg) av ett tal a är det tal som 10 skall höjas upp med för att bli a ") får vi helt enkelt

$$50 = 10^{\lg 50}$$

Med detta är vi redo att lösa ekvationer av typen $3^x = 17$

Skriv om båda leden med basen 10: $10^{x \lg 3} = 10^{\lg 17}$

Baserna är lika varför exponenterna är lika: $x \lg 3 = \lg 17$

$$x = \frac{\lg 17}{\lg 3} \approx 2,579$$

Kontrollera med miniräknare att detta är en lösning till ovanstående ekvation.

Halveringstid

Radioaktiva material faller sönder till lättare ämnen. Man talar om halveringstider, så lång tid det tar för hälften av materialet att sönderfalla. Halveringstid betecknas $t_{1/2}$.

$t_{1/2}$ för ett visst ämne är 4,0 år. Hur lång tid tar det tills det är 2% kvar av en viss mängd av detta ämne?

Antag att x är **antalet** halveringar.

$$0,02 = 0,5^x = \underbrace{0,5 \cdot 0,5 \cdot 0,5 \dots \cdot 0,5}_{\substack{4 \text{ år} \quad 4 \text{ år}}}$$

$$\lg 0,02 = x \lg 0,5$$

$$x \approx 5,64$$

Varje halvering tar 4 år, därför tar det 22,6 år, dvs 22 år och 7 månader.

En alternativ metod att beräkna denna uppgift är om man utgår från den exponentiella "modellfunktionen",

$y = f(t) = C \cdot a^t$ där y står för andelen och t för tiden.

$$f(0) = 1, \text{ dvs } C = 1$$

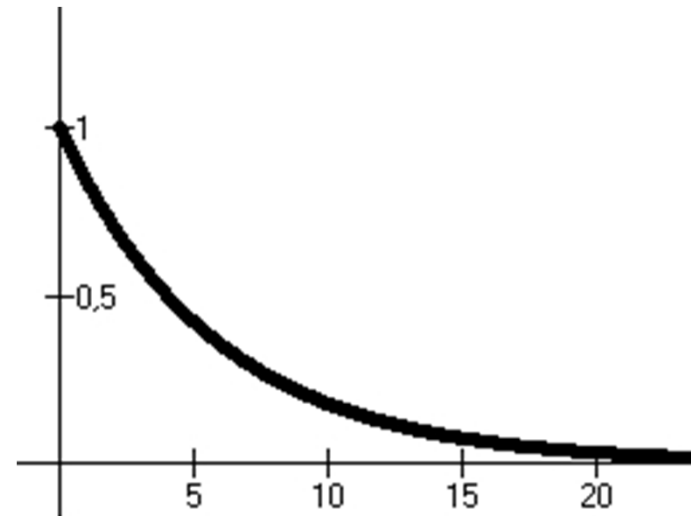
$$f(4) = 0,5 \text{ dvs } a^4 = 0,5$$

$$a = 0,5^{1/4}$$

$$\text{Alltså: } 0,02 = \left(0,5^{1/4}\right)^t = 0,5^{t/4}$$

$$\lg 0,02 = \frac{t}{4} \lg 0,5$$

$$t = 22,6 \text{ år}$$



Allmän funktion som används vid beräkning med halveringstid:

$$y = 0,5^{t/t_{1/2}} \text{ eller } y = 2^{-t/t_{1/2}}$$