Centripetalkraft

Den resulterande kraften i centralrörelse

Kapitel 1: Tyngd ur rotation – introduktion

Kapitel 2: Li och centripetalkrafterna – en faktabaserad saga

Text och idé: Nikodemus Karlsson

Original character art by Esa Holopainen,

http://www.verikoirat.com

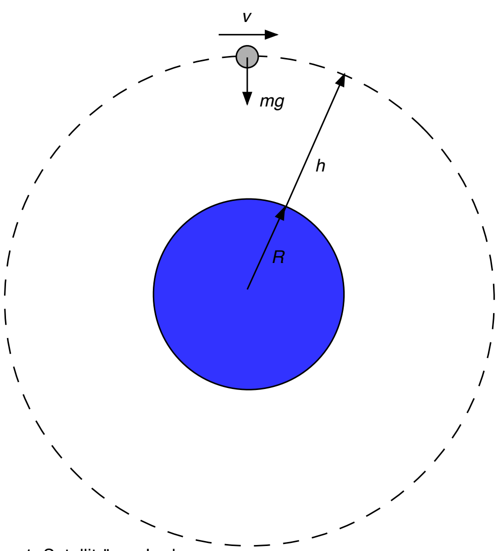
Kapitel 1: Tyngd ur rotation – en introduktion

1.1 Centripetalkraft på svenska – satellitexempel

Föremål som faller fritt ”känner inte av” någon tyngd. Skulle vi t ex sitta instängda i en hisskorg där vajern har brustit skulle vi uppleva oss som tyngdlösa i hisskorgen. Skulle vi där hänga upp en vikt på en dynamometer skulle denna inte göra något utslag. Naturligtvis är vi inte tyngdlösa då vi påverkas av tyngdkraften $F = mg$. Däremot är vi skenbart tyngdlösa; upplevelsemässigt och mättekniskt är det ingen skillnad.

Vad är det som ger oss känslan av tyngd?

Astronauter ombord på en satellit är även de skenbart tyngdlösa. De undergår ett kontinuerligt fritt fall mot Jorden. Det som håller kvar satelliten i en bana är Jordens gravitation som drar satelliten mot sig. Orsaken till att den faktiskt inte faller ned på marken är att den har en tangentiell hastighet (en fart ”framåt”). Den faller alltså lika mycket som Jorden hinner kröka sig under sin färd ”framåt”. När Christer Fuglesang var på rymdstationen ISS låg den i en bana 400 km från Jordens yta och hade en tangentiell hastighet på 28 000 km/h.



Figur 1: Satellit över Jordens yta med den tangentiella hastigheten *v* och tyngden *mg*

Då satelliten hela tiden faller fritt mot Jorden måste den cirkulära rörelsen vara en konstant accelererad rörelse. Det är kraften in mot mitten - *centripetalkraften* - som får rörelsen att ändra riktning kontinuerligt. (Ordet centripetal betyder centrumsökande. I det här fallet så roterar en satellit runt Jorden, varpå den enda kraft som verkar på denna är gravitationskraften mellan Jorden och satelliten. Jorden är i centrum av banan och kraften är riktad mot denna.) Däremot är farten konstant; det tar lika lång tid att tillryggalägga ett varv varje varv.

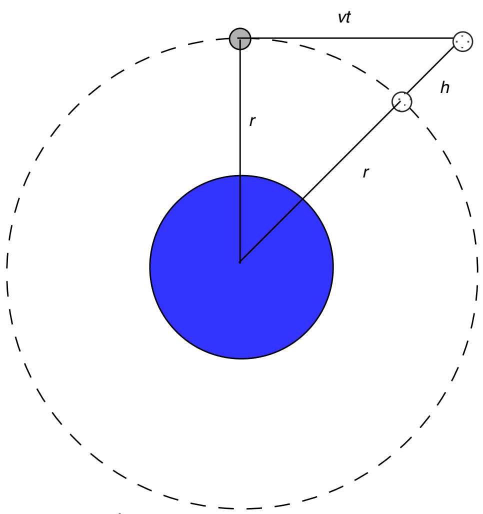
Vad skulle hända om vi (t ex med en kraft från raketer) ökar den tangentiella hastigheten, dvs förkortar omloppstiden? Jo, för varje tidsenhet som går måste då satelliten falla längre mot Jorden för att hålla sig kvar runt denna. Det kräver en större acceleration ”nedåt”, och därmed en större kraft (centripetalkraft).

I en cirkulär rörelse, i detta fall hos en satellit, uppstår ett skenbart tyngdlöst tillstånd när kretsar kring Jorden med lägsta möjliga hastighet (en hastighet som beror på avståndet till

Jorden). Inuti satelliten faller allt med samma hastighet, vilket gör att man kan placera föremål, eller sig själv, på en plats i rummet och förvänta sig att det ska vara kvar där (ett föremål ”i luften” blir kvar där för att det faller lika snabbt som omgivningen i satelliten). Höjer man rotationshastigheten, men bibehåller höjden, måste satelliten falla mot Jorden med en längre sträcka per tidsenhet, varför allt inuti satelliten ”faller” med ökad hastighet (jämfört med det tyngdlösa tillståndet). Det gör att ett föremål som placeras i luften faller med en lägre hastighet än satelliten själv. Därför kommer satellitens ”golv” att hinna ikapp föremålet i sitt fall, och det kommer att pressas ned mot ”golvet”. Vi upplever nu en tyngd, och orsaken till det är att vi har normalkrafter från ”golvet”. Den (skenbara) tyngd vi upplever motsvarar inte hela centripetalkraften, utan bara den del av den som ”blir kvar” utöver det som krävs för att hålla satelliten i sin bana med lägsta möjliga hastighet.

1.2 En informell härledning av formel för beräkning av centripetalkraftens storlek

Vi tänker oss situationen i Figur 1, där en satellit kretsar kring Jorden. Enligt resonemang ovan kommer satelliten att falla mot Jorden samtidigt som Jorden ”drar sig undan” i och med sin krökning. Vi kan tänka oss en överdriven bild på följande vis



Figur 2: Satellit på höjden *h* över Jordens yta där man tänker sig att den hinner sträckan *vt* innan den faller ned sträckan *h*

där satelliten hinner sträckan vt i en riktning samtidigt som den faller sträckan h mot Jorden. Pythagoras sats på triangeln i Figur 2 ovan ger oss följande.

$$(r+h)^2 = (vt)^2 + r^2$$

$$r^2 + 2rh + h^2 = v^2 t^2 + r^2$$

$$h(2r+h) = v^2 t^2$$

Om tiden är kort (rörelse är en kontinuerlig process, så vi kan låta tiden gå mot noll) kommer h att bli försumbart liten i förhållande till r, varför

$$2rh \approx v^2 t^2$$

$$h \approx \frac{1}{2}\left(\frac{v^2}{r}\right)t^2$$

Då $h = \frac{1}{2}at^2$ (fritt fall mot Jorden med begynnelsehastigheten 0 i varje ögonblick) gäller således att

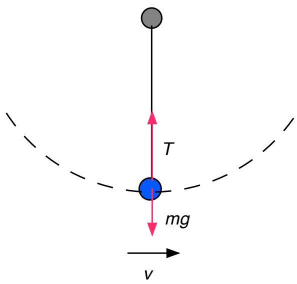
$$a = \frac{v^2}{r}$$

Kraftekvationen, $F = ma$ gäller, varför ett uttryck för centripetalkraften blir

$$F_c = \frac{mv^2}{r}$$

1.3 Pendelexempel – skillnad mellan skenbar tyngd och centripetalkraft

Uppgift: En pendelkula på 100 gram släpps från horisontalläge (90° i förhållande till lägsta punkten i nedanstående Figur 3) i ett 1.0 meter långt snöre och får sedan svänga fram och tillbaka.



Figur 3: Verkande krafter på pendelkula

a. Mät kraften som kulan påverkas med av snöret i det nedersta läget
b. Beräkna centripetalkraften som kulan påverkas av
c. Förklara varför det finns en skillnad

Lösning:

a. Kraften mäts med en dynamometer till 3.0 N.
b. Energiomvandling ger:

$$mgh = \frac{mv^2}{2}$$

$$v = \sqrt{2gh}$$

$$v = \sqrt{2 \cdot 9.82 \cdot 1.0} = 4.43\, m/s$$

Centripetalkraften beräknas:

$$F_c = \frac{mv^2}{r} = 2.0\text{ N}$$

c. Skillnaden beror på att det vi mäter med dynamometern är pendelkulans skenbara tyngd, vilket inte är detsamma som centripetalkraften. För att hålla kvar kulan i sin bana måste F_c = 2.0 N, men snöret måste hålla både denna kraft och tyngden på pendelkulan. Detta resulterar i en spänning som är större än centripetalkraften när kulan är i sitt nedersta läge. Matematiskt kan detta uttryckas som $F_c = T - mg \Rightarrow T = F_c + mg$. Det är alltså spännkraften i snöret, T, som mäts med dynamometern.

Vidareutveckling av exemplet: Fundera på hur spänn- och centripetalkraft skulle påverkats om

i. Kulan inte skulle släppts från horisontalläge, utan från en vinkel mindre än 90°

ii. Snöret skulle haft en mindre respektive större längd än 1.0 meter

Kapitel 2: Li och centripetalkrafterna – en faktabaserad saga

2.1 Prolog

För att hålla kvar föremål i en cirkulär bana krävs som bekant en kraft som drar föremålet mot centrum av denna bana, samtidigt som det rör sig med en tangentiell hastighet ”framåt” i banan.

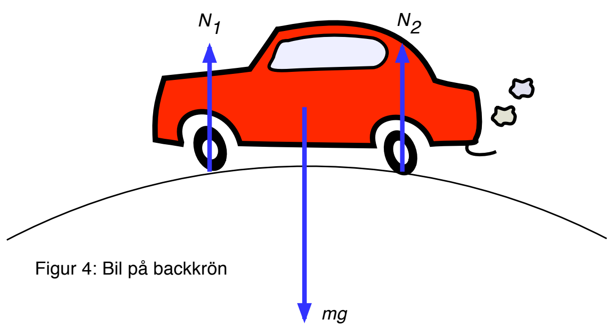
Det är viktigt att inse att centripetalkraften inte är en egen sorts kraft, utan att det är en annan kraft som verkar som centripetalkraft. I vissa fall är det en enda kraft som verkar som centripetalkraft, t ex när en bil färdas genom en kurva är det friktionskraften som ser till att bilen följer kurvan. I andra fall är det flera krafter som samverkar med (eller motverkar) varandra, och resultanten av dessa utgör då centripetalkraften. Centripetalkraften kan alltid beräknas med den i förra avsnittet härledda formeln

$$F_c = \frac{mv^2}{r}$$

Det som, som sagt, är viktigt att inse är att denna framräknade kraft är en resultant till alla de krafter som är involverade i systemet.

2.2 Bil på backkrön

Li Jonsson är en elev på NV-programmet som även är intresserad av bilkörning. Sedan hon var barn har hon noterat att man känner sig lättare när man åker med bilen över ett backkrön. Hon har undrat vad det beror på, samtidigt som hon kan tänka sig att det vid en viss fart måste bilens hjul i det närmaste lätta från vägbanan. När Li är ute och kör, med nytt körkort, gör hon några fysikaliska reflexioner. Hon kommer till ett backkrön, och plötsligt så ser hon framför sig vad denna ”lättning” beror på. Betrakta nedanstående bild:



Figur 4: Bil på backkrön

Centripetalkraften är vektorsumman av normalkrafterna (från vägbanan) N_1, N_2 och av tyngdkraften mg. Då dessa är riktade åt olika håll (180° skillnad i riktning) blir resultanten (positiv riktning uppåt):

$$F_{\text{res}} = F_c = N_1 + N_2 - mg = -\frac{mv^2}{r}$$

(Notera minustecknet på centripetalkraften: positiv riktning definierades uppåt. Vi kunde definierat positiv riktning nedåt, med då hade N_1 och N_2 blivit negativa istället.) Nu löser vi ut $N_1 + N_2$:

$$N_1 + N_2 = mg - \frac{mv^2}{r} = m\left(g - \frac{v^2}{r}\right)$$

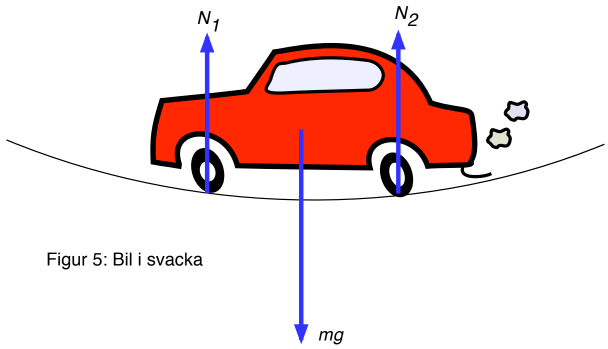
Vi ser att N_1+N_2 kan minska (komma närmare noll) på tre sätt: Antingen genom att farten v ökar, genom att krönets radie minskar eller genom att minska massan. Det tredje sättet, att minska massan, är dock inte särskilt intressant om man ska utföra beräkningar på *hur mycket* bilen "lättar" (skillnaden mellan normalkraften från horisontell väg och backkrön) : en mindre massa ger i båda fallen en mindre normalkraft, skillnaden är alltid $\left(g - \frac{v^2}{r}\right)$.

Vid vilken fart kommer då bilen att förlora kontakten med vägbanan för ett givet backkrön? Jo, när $N_1 + N_2 = 0$, och därmed $\left(g - \frac{v^2}{r}\right) = 0$, vilket leder till att $v = \sqrt{rg}$. Eftersom massan inte ingår i uttrycket spelar det således ingen roll, ur vägbanekontaktaspekten i detta fall, om vi sitter i en tung stadsjeep eller en liten och lätt bil.

Effekten blir att Li kommer att uppleva en lägre tyngd än normalt i denna situation. Hennes *skenbara tyngd* blir lägre (och noll då bilen normalkraften försvinner).

2.3 Bil i svacka

Li fortsätter med sin körning efter att hon landat från strapatserna i backkrönet, och kommer strax till en svacka i vägen enligt Figur 2. Från att nästan ha tappat kontakten med vägbanan, och den skenbara tyngden närmat sig noll både på bil och på Li, känner hon sig nu ovanligt tung. Fysikintresserad som hon är börjar hon genast klura på varför.



Figur 5: Bil i svacka

Med samma resonemang som förra exemplet (Bil på backkrön) skapar vi ett uttryck för kraftresultanten, som ju måste utgöra centripetalkraften. Det enda som kommer att skilja är att, om vi som tidigare tar positiv riktning uppåt, är att centralrörelsens medelpunkt kommer att ligga i positiv riktning. Vi får således

$$F_{\text{res}} = F_c = N_1 + N_2 - mg = \frac{mv^2}{r}$$

Löser vi ut normalkraften ur detta uttryck erhåller vi

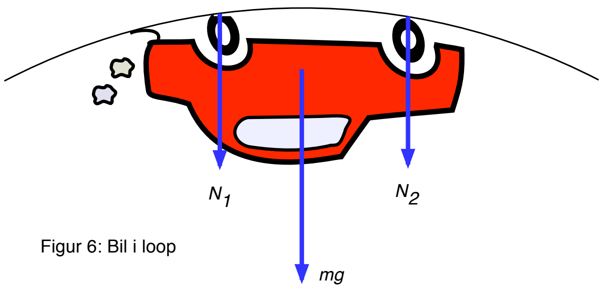
$$N_1 + N_2 = \frac{mv^2}{r} + mg$$

Eftersom det är normalkraften (från vägen till bilen och från bilen till Li) som gör att hon upplever en tyngdkraft så det stämmer att hon känner sig tyngre i denna situation. Vi ser här, på samma sätt som tidigare, att det endast är bilens fart och krökningsradiens längd som avgör vilken ökning (i förhållande till plan mark utan acceleration i någon riktning) av tyngd du kommer att uppleva. I detta fall blir alltså den skenbara tyngden större än på ett plant underlag utan acceleration.

2.4 Bil i loop

Nu har vår fysikhjältinna alltså varit med om två skenbara tyngdförändringar. Framför allt den senare, när hon utsattes för stora g-krafter, tog på krafterna. Hon stannar bilen och pustar ut, samtidigt som hon faller i en lätt dvala.

Där upplever Li att bilen hon sitter i går in i en loop enligt nedanstående figur (hon måste verkligen drömma, för hennes bil är inte alls konstruerad för denna typ av körning).



Figur 6: Bil i loop

Efter allt hennes tänkande har hon nu blivit van att se krafter som en storhet med både storlek och riktning, och hon inser, trots sitt tillstånd i dvala, att alla krafter (och därmed även den resulterande centripetalkraften) har samma riktning. I ett skärpt ögonblick inser hon även att det då heller inte spelar någon roll i vilken riktning du definierar den positiva. För att göra det enkelt för sig definierar hon nu den positiva riktningen nedåt, och erhåller

$$F_{\mathrm{res}} = F_c = N_1 + N_2 + mg = \frac{mv^2}{r}$$

och därmed

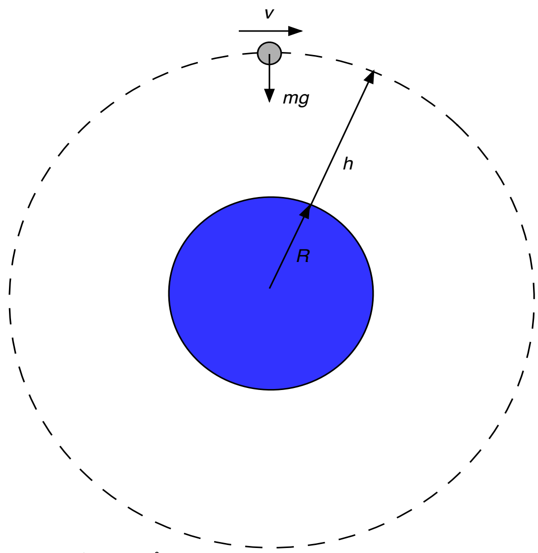
$$N_1 + N_2 = \frac{mv^2}{r} - mg = m\left(\frac{v^2}{r} - g\right)$$

Precis som i fallet med backkrönet kommer Li att riskera att bli skenbart tyngdlös, dock inte om hon kör för fort, utan om hon kör för långsamt. Kör hon långsammare än farten $v = \sqrt{rg}$ kommer bilen att falla ur loopen och landa på taket...

Denna upptäckt gör att Li vaknar ur dvalan och raskt kör hemåt.

2.5 Synkronbanan

När Lis väloljade hjärna nu spinner vidare på det här med centralrörelse, kommer hon att tänka på satelliter: ”De faller ju inte ned för att de de har en fart framåt, så när de faller dras ju Jorden undan hela tiden... Men även Jorden snurrar ju, så att det måste ju finnas en höjd över Jordens yta där satelliter och Jorden snurrar med samma hastighet. Det måste resultera i att satelliten befinner sig över samma punkt på jordytan hela tiden. Det måste man ju kunna utnyttja för kommunikationssateliter!”



Figur 7: Satellit på höjden
h över Jordens yta

Resonemanget är att satelliten skall rotera med samma vinkelhastighet, ω, som Jorden. Beroende på höjden kommer då satelliten att få olika fart, v. Då måste det finnas en höjd för vilken gravitationskraften och farten gör att satelliten faller i Jordens krökning.

Gravitationskraften (som kommer att utgöra centripetakraften) beräknas med Newons gravitationslag, $F = G \cdot \frac{m \cdot M}{r^2}$, där m är satellitens massa, M är Jordens massa, r är avståndet mellan Jordens medelpunkt och satelliten ($R + h$ i Figur 4) och G är den universella gravitationskonstanten. Då centripetalkraften utgörs av gravitationskraften kan följande ekvation tecknas:

$$\frac{mv^2}{r} = G \cdot \frac{m \cdot M}{r^2}$$

eller, om vi skriver v som vinkelhastighet enligt $v = \omega \cdot r = \frac{2\pi}{T} \cdot r$, med periodtiden T (den tid det tar att kretsa ett varv):

$$m \cdot \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot r = G \cdot \frac{m \cdot M}{r^2}$$

eller förenklat:

$$r = h + R = \left(\frac{T^2 \cdot G \cdot M}{4\pi^2}\right)^{1/3} \Rightarrow h = \left(\frac{T^2 \cdot G \cdot M}{4\pi^2}\right)^{1/3} - R$$

Sätter vi nu in värden på periodtid (ett dygn uttryckt i sekunder - vitsen var ju att satelliten skall hålla samma periodtid som Jorden), Jordens massa (uttryckt i kg) och Jordens radie (uttryckt i meter) erhåller vi höjden h $\approx$ 36 000 km (när Christer Fuglesang besökte rymdstationen ISS roterade den kring Jorden på futtiga 400 km höjd, men då är ISS:s fart betydligt högre; exakt hur hög hastigheten var på denna höjd tänkte Li beräkna morgonen därpå).

Li hade nu insett centripetalkraftens sanna natur. Hon tyckte plötsligt att det var enkelt att rita upp kraftsituationer och göra beräkningar på dessa. Med dessa upptäckter somnade hon gott.

2.6 Epilog

Kontrollrummet var fullt med personal timmarna innan NASA:s bemannade rymdfarkost skulle lyfta med destination Mars. Restiden var beräknad till nio månader, och det var sex astronauter i NASA:s regi som skulle besätta den beboeliga stationen på Mars ekvator. Ett högtalarutrop påkallade uppmärksammhet: ”Dr. Jonsson, please come to Control Room A. ”

Li visste vad det gällde. Som chef för den grupp som beräknade rutten till Mars skulle hon med hjälp av den senaste insamlade datan avgöra om några korrigeringar i starten behövde göras. Hon log, och gick med raska steg mot kontrollrummet.